Continuità di funzioni

Es.1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f :]0, 1+\pi[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^{\alpha}|x-1|}{7x\log x}, & \text{per } x \neq 1\,, \\ \\ 0\,, & \text{per } x = 1\,. \end{cases}$$

Discutere, al variare del parametro α, la continuità di f nel suo dominio.

Per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f è continua in $\operatorname{dom} f \setminus \{1\}$.

Poiché $x = 1$ è punto di accumulazione del dominio di f, la continuità di f in $x = 1$ equivale ad avere che $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$.
Si ha:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin^{\alpha}|x-1|}{7x\log x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{7x}\,\frac{\sin^{\alpha}|x-1|}{|x-1|}\,\frac{|x-1|}{\log(1+(x-1))}\,.$$

Si calcola:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{7x} = \frac{1}{7}\,.$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{|x-1|}{\log(1+(x-1))} = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{\pm(x-1)}{\log(1+(x-1))} = \pm 1\,.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin^\alpha |x-1|}{|x-1|} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin|x-1|}{|x-1|} \sin^{\alpha-1}|x-1| = 0\,, \\ \qquad \text{per}\, \alpha > 1\,, \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin|x-1|}{|x-1|} = 1\,, \quad \text{per}\, \alpha = 1\,, \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin|x-1|}{|x-1|} \sin^{\alpha-1}|x-1| = +\infty\,, \\ \qquad \text{per}\ \alpha < 1\,. \end{cases}$$

Si ne ricava che

$$\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{per}\, \alpha > 1\,, \\ \\ \pm\frac{1}{7}\,, & \text{per}\, \alpha = 1\,, \\ \\ \pm\infty\,, & \text{per}\, \alpha < 1\,. \end{cases}$$

Si conclude pertanto che:

1. Per $\alpha > 1$, f è continua in tutto $\operatorname{dom} f$;

2. Per $\alpha \leq 1$, f è continua in $\operatorname{dom} f \setminus \{1\}$; se $\alpha = 1$, $x = 1$ è un punto di discontinuità a salto per f; se $\alpha < 1$, $x = 1$ è un punto di infinito per f.

Es.2. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\arccos x)^2}{2(1-x)^\alpha}, & \text{per } -1 \le x < 1\,, \\ \\ 1\,, & \text{per}\, x \ge 1\,. \end{cases}$$

Discutere, al variare del parametro α, la continuità di f nel suo dominio.

Per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f è continua in $[-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

Poiché $x = 1$ è punto di accumulazione del dominio di f, la continuità di f in $x = 1$ equivale ad avere che $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$. Poiché per $x \ge 1$ la funzione f assume il valore costante 1, si ha subito che $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ ($\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$). Resta da verificare per quali valori di α si ha $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$.

Si ha (effettuando il cambio di variabile $y = \arccos x$)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(\arccos x)^2}{2(1-x)^\alpha} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^2}{2(1-\cos y)^\alpha}\,.$$

Per $\alpha = 1$, si ha dunque:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^2}{2(1-\cos y)} = 1 = f(1)\,,$$

quindi f è continua in $x = 1$.
Per $\alpha \neq 1$ si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{y^2}{2(1-\cos y)} \frac{1}{(1-\cos y)^{\alpha-1}} = \begin{cases} +\infty\,, & \text{se}\,\alpha > 1 \\ 0\,, & \text{se}\,\alpha < 1\,. \end{cases}$$

Se ne ricava che:

1. Per $\alpha = 1$, f è continua in tutto $[-1, +\infty[$;

2. Per $\alpha \neq 1$, f è continua in $[-1, 1[\cup]1, +\infty[$; se $\alpha < 1$, $x = 1$ è un punto di discontinuità a salto per f; se $\alpha > 1$, $x = 1$ è un punto di infinito per f.

Es.3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{x} + \sqrt{|x|}\,, & \text{per}\, x \neq 0\,, \\ \\ \alpha\,, & \text{per}\, x = 0\,. \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ f è continua in $x = 0$. Negli altri casi, classificare il tipo di discontinuità.

Poiché $x = 0$ è punto di accumulazione del dominio di f, la continuità di f in $x = 0$ equivale ad avere che $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \alpha$.
Si calcola:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} + \sqrt{|x|} = 3\,,$$

da cui risulta che si ha la continuità in $x = 0$ per $\alpha = 3$.
Per qualsiasi $\alpha \neq 3$ la funzione f ha in $x = 0$ un punto di discontinuità eliminabile.

Es. 4. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = \begin{cases} (x+2)^{x+2} + \dfrac{\alpha - 2}{x+2}\,, & \text{se}\, x > -2\,, \\ \\ 1\,, \quad \text{se}\, x \leq -2\,. \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ g è continua in $x = -2$. Negli altri casi, classificare il tipo di discontinuità.

Poiché $x = -2$ è punto di accumulazione del dominio di f, la continuità di f in $x = -2$ equivale ad avere che $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 1$.
Dato che la funzione assume il valore costante 1 per $x \leq -2$, si ha subito che $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 1$.
Osservando che per ogni $x > -2$ vale l'identità

$$(x+2)^{x+2} = e^{(x+2)\log(x+2)}\,,$$

e avendo che

$$\lim_{x \to -2^+} (x+2)\log(x+2) = \lim_{y \to 0^+} y \log y = 0\,,$$

se ne deduce che per $\alpha = 2$:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} e^{(x+2)\log(x+2)} = 1\,,$$

e quindi che f è continua in $x = -2$.
Per $\alpha \neq 2$ si ha invece:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x)$$
$$= \lim_{x \to -2^+} e^{(x+2)\log(x+2)} + \frac{\alpha - 2}{x+2} = \begin{cases} +\infty\,, & \text{per } \alpha > 2\,, \\ \\ -\infty\,, & \text{per } \alpha < 2\,. \end{cases}$$

In conclusione, abbiamo che:

1. Per $\alpha = 2$, f è continua in $x = -2$;

2. Per $\alpha \neq 2$, $x = -2$ è un punto di infinito per f.