Classificazione dei punti di discontinuità. Esempi

1) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,, & \text{se}\, x \neq 0 \\ 1\,, & \text{se}\, x = 0 \end{cases}$$

presenta in $x_0 = 0$ una *discontinuità eliminabile* (o x_0 è un *punto di discontinuità eliminabile* per f). Infatti $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$.

2) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,, & \text{se}\, x \neq 0 \\ 1\,, & \text{se}\, x = 0 \end{cases}$$

ha in $x_0 = 0$ un *punto di infinito*. Infatti $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$.

3) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se}\, x \geq 0 \\ -1\,, & \text{se}\, x < 0 \end{cases}$$

presenta in $x_0 = 0$ una *discontinuità a salto* (o x_0 è un *punto di discontinuità a salto* per f) . Infatti $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm 1$.

4) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}\,, & \text{se}\, x < 0 \\ 0\,, & \text{se}\, x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\,, & \text{se}\, x > 0 \end{cases}$$

presenta in $x_0 = 0$ una *discontinuità di seconda specie* (o x_0 è un *punto di discontinuità di seconda specie* per f). Infatti non esiste il $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ (mentre si ha $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$).